- ملاحظة :

من المحاضرة السابقة نلاحظ بأنه إذا كانت الدالة $f = u + iv$ قابلة للاشتقاق فعندئذٍ يلزم أن تكون المشتقات الجزئية للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين (x , y) موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك يلزم أن تحقق هذه المشتقات الجزئية شرطي كوشي ريمان

- السؤال الذي يطرح نفسه : هل إذا تحققت شرطي كوشي ريمان تكون الدالة $f = u + iv$ قابلة للاشتقاق ؟

والإجابة من خلال المثال التالي

لتكن لدينا الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \text{ عند} \\ 0 & z = 0 \text{ عند} \end{cases}$$

هل هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند $z=0$.

الحل :

نأخذ النهاية :

$$\lim \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ونريد إثبات أنها موجودة

$$\Rightarrow \lim \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\frac{(\bar{z})^2}{z} - 0}{z - 0} = \lim \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\bar{z}^2}{z^2}$$

وبالتالي هذه النهاية غير موجودة لأنه :

إذا جعلنا z تقترب من الصفر على المحور الحقيقي $z = x$ ، $\bar{z} = x$

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

على المحور التخيلي $z = iy$ ، $\bar{z} = -iy$ ومنه $\frac{\bar{z}}{z} = -1$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{(-iy)^2}{(iy)^2} = 1$$

نجعل z تسعى نحو الصفر على منصف الربع الأول والثالث $(y = x)$

$z = x + xi \Rightarrow \bar{z} = x - ix$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{x^2(1-i)^2}{x^2(1+i)^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-2i}{2i} = -1$$

نلاحظ أن نتيجة الدالة اختلفت باختلاف الطريق المؤدي إلى الصفر أي غير موجودة

أي أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $z = 0$

$$f(z) = \frac{(\bar{z})^2}{z} = \frac{(\bar{z})^3}{z.\bar{z}} = \frac{x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)}{x^2 + y^2}$$

طبعاً: من المعروف $z = x + iy$

$z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - i\,\frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy}{x^2 + y^2} \qquad v(x,y) = \frac{-3x^2y + y^3}{x^2 + y^2}$$

$\Rightarrow u(x,0) = x \Rightarrow \qquad v(x,0) = 0$

$u(0,y) = 0 \qquad v(0,y) = y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

من خلال المثال السابق اذا حققت أي دالة شروط كوشي وريمان فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق.

والمحاضرة التالية سنعطي الشروط الكافية لتكون الدالة قابلة للاشتقاق

Scanned by CamScanner

* المبرهنة الحاوية على الشروط لكي تكون الدالة قابلة للاشتقاق :

ليكن $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ اذا كانت المشتقات الجزئية للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين (x,y) موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي وريمان

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

عندئذٍ تكون :

الدالة f قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى تعطى بالصيغة

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{أو} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال

لتكن لدينا الدالة :

$$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

الحل : لدينا

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

- نلاحظ أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك تحقق شرط كوشي وريمان . عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي . وبالتالي الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي والمشتقة الأولى تعطى بالشكل :

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

$$f'(z) = f(z)$$

مثال :

أثبت أن $f(z) = \bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق :

الحل :

$$f(z) = x - iy$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x \quad , \quad v(x,y) = -y$$

$$\left[\arctan(\text{المقدار})\right]' = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{1 + (\text{المقدار})^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة لأنها دوال ثابتة .

لكن نلاحظ أن $\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}$ ، $-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

أي أن أحد شرطي كوشي ريمان غير متحقق ⇐ الدالة غير قابلة للاشتقاق .

ملاحظة :

لإثبات أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يكفي أن نثبت أن أحد شرطي كوشي ريمان غير متحقق

* شرطا كوشي ريمان بالإحداثيات القطبية :

لتكن الدالة $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ دالة قابلة للاشتقاق ،

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} \;,\; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{r\sin\theta}{r^2} = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = +\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta + -\frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= -\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

نعوض عن المشتقات الأربعة في شرط ريمان الأول، فنحصل على.

$$① \ldots \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

العلاقة تكتب بالشكل:

$$(*)\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\cos\theta = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta$$

نعوض، بالمشتقات بالشرط الثاني نجد:

$$② \ldots \cos\theta \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

العلاقة (2) تكتب بالصورة:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\sin\theta = -\left(\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta \quad (**)$$

نضرب العلاقة * بـ $\cos\theta$ و ** بـ $\sin\theta$ ثم نجمع * و ** فنجد

$$\left(\frac{\partial u}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta}}$$

الشرط الأول لريمان وكوشي بالشكل القطبي

Scanned by CamScanner

ومنه بعد الضرب * بـ $\sin\theta$ ونضرب ** بـ $-\sin\theta$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}}$$ ② الشرط الثاني لكوشي ريمان

أما المشتقة الأولى تعطى بإحدى الصيغتين:

① $$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

أو

② $$f'(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

- سوف نثبت إحدى الصيغ ~~[شطب]~~ - ونترك الثانية بشكل مشابه

نعلم من الإحداثيات الديكارتية:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + i\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$$

$$= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\left(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$
$$- \frac{i}{r}\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) - i\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} - i\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) - i\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

ومنها الشكل تكون هذه اشتقاقه المرجعية:

إذا كانت لدينا الدالة $f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$ إذاً الشرط اللازم والكافي لكون الدالة قابلة للاشتقاق هو أن تكون المشتقات الجزئية للدالتين u, v بالنسبة للمتغيرين القطبيين (r,θ) موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك هذه المشتقات تحقق شرطا كوشي ريمان بالصيغة القطبية

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

شرطا كوشي ريمان بالشكل القطبي.

المشتقة الأولى هي

الصيغة السابقة $(f'(z))$ بالصيغة السابقة

مثال

لتكن لدينا الدالة: $f(z) = r^2\cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta$

بيّن هذه الدالة قابلة للاشتقاق وأوجد المشتقة الأولى

الحل:

$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$ $\qquad$ $v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$

$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 2r^2\cos 2\theta$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r^2\sin 2\theta$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial r} = 2r\sin 2\theta$

هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة على كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وتحقق شرطا كوشي ريمان، إذن الدالة قابلة للاشتقاق

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(2r^2\cos 2\theta\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

الشرط الأول محقق

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\left(-2r^2\sin 2\theta\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الشرط الثاني محقق

المشتقة الأولى تساوي

$$f'(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left[2r^2\cos 2\theta + i\,2r^2\sin 2\theta\right]$$

$$= 2r\,e^{-i\theta}e^{i2\theta} = 2r\,e^{i\theta} = 2z$$

ملاحظة

(8) كل دالة تحليلية هي دالة مستمرة

مثال (مهم)

لتكن لدينا الدالة :

$$f(z) = r\cos\theta - i\,r\sin\theta$$

أثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق وإذا كانت قابلة للاشتقاق فاحسب المشتقة الأولى

الحل

$u(r,\theta) = r\cos\theta \qquad v(r,\theta) = r\sin\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -r\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\sin\theta$$

نلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة

لكن
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta = \frac{1}{r}\,r\cos\theta \neq \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

وأيضاً
$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\sin\theta = -\frac{1}{r}\,r\sin\theta \neq -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وبالتالي الدالة ليست قابلة للاشتقاق

لأن شرط كوشي ريمان لم يتحقق

الدالة التحليلية :

لتكن لدينا الدالة $w = f(z)$ معرفة على المنطقة D ولتكن z_0 نقطة من هذه المنطقة. نقول عن هذه الدالة أنها دالة تحليلية عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 و قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط جوار ما لـ z_0

نقول عن الدالة $w = f(z)$ أنها تحليلية على المنطقة D إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند كل نقطة من نقاط هذه المنطقة.

نقول عن الدالة $w = f(z)$ أنها دالة شاملة إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي

مثال: لتكن لدينا الدالة : $f(z) = x - y^2 + i\,(y + x^2)$

① عيّن من المستوي العقدي النقاط التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق ثم بيّن أين تكون هذه الدالة تحليلية.

Scanned by CamScanner

الحل :

$u = x - y^2$ $\qquad$ $v = y + x^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$

متساوية عند x و y

نلاحظ أن الشرط الأول محقق ، والشرط الثاني تكون محقق عندما $x = y$ وهي نقاط منصف الربع الأول والثالث.

نلاحظ أن الدالة تكون قابلة للاشتقاق فقط عند نقاط المستقيم $x = y$ عند هذه النقاط لكن قابلة للاشتقاق وبالتالي غير تحليلية.

لو أخذنا أي نقطة من المستقيم $x = y$ فإن أي جوار لهذه النقطة يحوي نقاط تكون الدالة في الحالة الأولى قابلة للاشتقاق عند بعض النقاط وغير قابلة عند البعض الآخر لذلك فإن الدالة غير تحليلية عند جميع النقاط التي تكون الدالة قابلة للاشتقاق عندها أي الدالة غير تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي

تابع التحليل العقدي (2)

* النقطة الشاذة للدالة :

نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة شاذة للدالة $w = f(z)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة w غير قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 وقابلة للاشتقاق عند بعض نقاط جوار ما لهذه النقطة

* الدالة التوافقية :

لتكن لدينا الدالة الحقيقية $u = u(x,y)$ التي تتعلق بـ (x,y) نقول عن هذه الدالة بالمتغيرين أنها دالة توافقية إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية لهذه الدالة بالنسبة للمتغيرين المستقلين (x,y) موجودة ومستمرة ومحققة للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ [illegible]

والتي تعرف بمعادلة لابلاس التفاضلية

مثال: أثبت أن الدالة $u(x,y) = x^2 - y^2$ هي دالة توافقية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

وبالتالي $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$

وبالتالي الدالة المعطاة دالة توافقية

× ملاحظة:

إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية عندئذٍ تكون كل من u, v دالة توافقية.

الإثبات:

لإثبات هذه المبرهنة سوف نعتمد على جزء مبرهنة سوف ندرسها في حلقات قادمة عند دراسة التكامل المستقيم الخط عند المبرهنة:

إذا كانت الدالة $w = f(z)$ تحليلية عندئذٍ هذه الدالة تملك مشتقات من مراتب عليا.

الإثبات: بما أن f دالة تحليلية عندئذٍ فإنه بالإضافة عندئذٍ شرطا كوشي ريمان محققان:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

نشتق العلاقتين في كل مما: مرة بالنسبة لـ x ومرة بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Scanned by CamScanner

عادة الدالة "f" موجودة أي قابلة للاشتقاق ⇐ "f" دالة مستمرة. وبالتالي مستمرة ⇐ دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي ⇐ دوال مستمرة ⇐

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \wedge \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

~~نستنتج~~ من هاتين المساواتين والعلاقات السابقة نستنتج أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي أن كل من u , v دوال توافقية.

نستنتج من المرحلة السابقة أنه إذا كانت إحدى الدالتين دالة غير توافقية عندئذٍ تكون f غير تحليلية.

× المرافق التوافقي:

Scanned by CamScanner